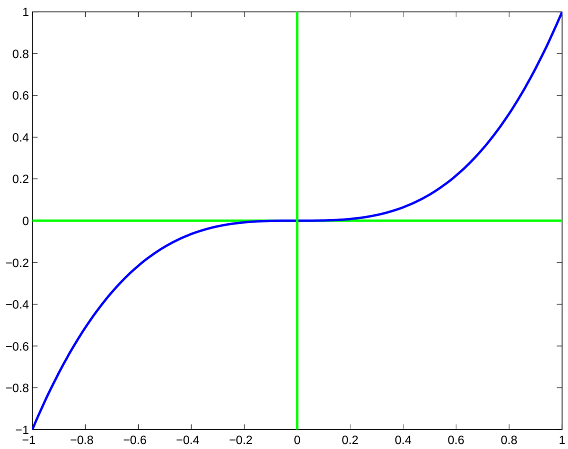


Abbildung 1: $f = XY$ und $g = Y - X^3$

Vorlesung vom 23.05.16

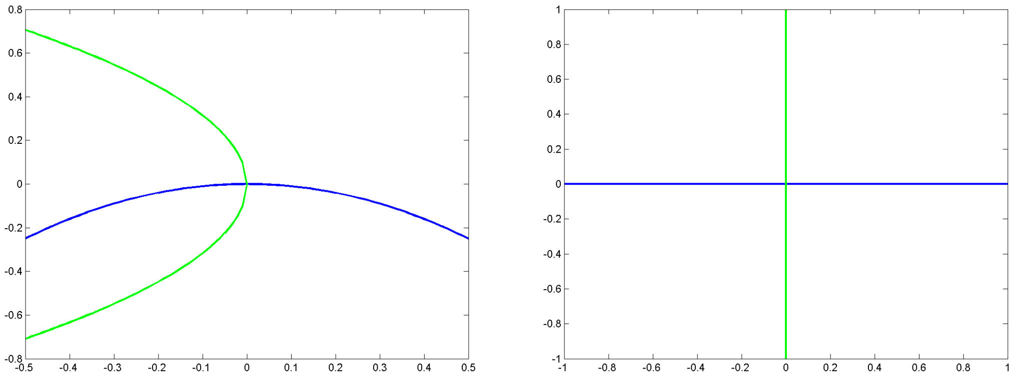
In folgenden Beispielen sind $C = \mathrm{V}(f)$, $D = \mathrm{V}(g)$ und $p = 0$ gegeben, wobei f,$g \in \mathbb{C}[X,Y] \subset \mathbb{C}[[X,Y]]$ und $p \in C \cap D$. Es soll nun die Schnittmultiplizität $\mathrm{I}(C,D,p) := dim_{\mathbb{C}}\mathbb{C}[[X,Y]]/(f,g)$ untersucht werden.

Beispiel

1. Sei nun $f = XY$ und $g = Y - X^3$ (siehe Abbildung 1). Es muss nun untersucht werden, welche Monome in (f,g) liegen. Da $f = XY \in (f,g)$ gilt, liegen auch alle Monome X^nY^m für $n,m \geq 1$ in (f,g). Außerdem gilt $Xg = XY - X^4 \in (f,g)$, womit $X^4 \in (f,g)$ folgt, da ja bereits XY in (f,g) liegt. Mit $Yg \in (f,g)$ findet man auf dem selben Weg heraus, dass $Y^2 \in (f,g)$. Also ist die Basis von $\mathbb{C}[[X,Y]]/(f,g)$ mit den Monomen $1, X, X^2, X^3, Y$ aufgespannt, wobei $X^3 = Y$. Somit ist die Dimension 4, also gilt $\mathrm{I}(C,D,p) = 4$.

2. Sei jetzt $f = XY$ und $g = Y^2 - X^3$. Mit den selben Überlegungen erhält man nun die Basis $1, X, X^2, X^3, Y, Y^2$, wobei hier $X^3 = Y^2$ gilt, also ist $\mathrm{I}(C,D,p) = 5$.

3. Sei nun $\mathfrak{m} = (X,Y)$, $\mathfrak{m}^2 = (X^2, XY, Y^2)$ und dementsprechend $\mathfrak{m}^n$ das Ideal, welches von allen Monomen n-ten Gerades erzeugt wird. Es gilt:
$$\mathbb{C}[[X,Y]] \supset \mathfrak{m} \supset \mathfrak{m}^2 \supset \mathfrak{m}^3 \ldots$$
und $dim_{\mathbb{C}}\mathbb{C}[[X,Y]]/\mathfrak{m} = 1$, $dim_{\mathbb{C}}\mathbb{C}[[X,Y]]/\mathfrak{m}^2 = 3$ usw. Für $f = X + A$ und $g = Y + B$, wobei $A, B \in \mathfrak{m}$ (z.B. $f = X + Y^2$ und $g = Y + X^2$) ist die Schnittmultiplizität $\mathrm{I}(C,D,0) = 1$, also auch $dim_{\mathbb{C}}\mathbb{C}[[X,Y]]/(X + A, Y + B) = 1$ (vgl. Abblidung 2). Um dies zu zeigen, betrachtet man das Ideal (X,Y) folgendermaßen:
$$X = f - A = f + \alpha X + \beta Y, \qquad \alpha, \beta \in m,$$



(a) $f = X + A$, $g = Y + B$ (b) $f = X$, $g = Y$

Abbildung 2: Schnittmultiplizität $\mathrm{I}(C, D, 0) = 1$

$$Y = g - B = g + \gamma X + \delta Y, \qquad \gamma, \delta \in m.$$

In Vektoren entspricht dies dann:

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix},$$

also

$$M \cdot \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}, \qquad M = \mathbb{1} - \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}, \qquad M \in \mathrm{Mat}(2 \times 2, \mathbb{C}[[X, Y]]).$$

Die Frage ist nun, ob M invertierbar ist. Im lokalen Ring gilt, dass $f \in \mathbb{C}[[X, Y]]$ genau dann invertierbar ist, wenn $f(0) \neq 0$, also wenn f die Form $f = c + \alpha x + \beta y + \ldots$ hat mit $c \neq 0$. Da $\det(M)$ in $\mathbb{C}[[X, Y]]$ liegt und $\det(M)(0, 0) = \det(\mathbb{1}) = 1$ gilt, existiert dementsprechend die Inverse von M:

$$M^{-1} = \frac{1}{\det(M)} M^{adj} \in \mathrm{Mat}(2 \times 2, \mathbb{C}[[X, Y]]).$$

Daraus folgt:

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = M^{-1} \cdot \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad X \in (f, g), \qquad Y \in (f, g).$$

Es gilt $(X, Y) \subset (f, g) \subset (X, Y)$, also $(X, Y) = (f, g)$. Damit folgt dann die oben genannte Behauptung $dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[[X, Y]]/(f, g) = dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[[X, Y]]/(X, Y) = 1$.

Die allgemeine Aussage des dritten Beispiels ist das Lemma von Nakayama:

Satz (Lemma von Nakayama). *Sei I ein beliebiges, endlich erzeugtes Ideal in einem lokalen Ring. Gilt für ein Ideal J die Inklusion:*

$$I \subset J + \mathfrak{m} I,$$

so folgt daraus, dass $I \subset J$ gelten muss.

Beweis. Durch Wiederholen von Erzeugern kann angenommen werden, dass die Anzahl der Erzeuger von I und J gleich sind, also $n = m$ (ansonsten sei $n = \min(\dim(I), \dim(J))$. Sein nun $\underline{g} = (g_1, g_2, \ldots, g_n)^T$ ein Erzeugendensystem von I und $\underline{f} = (f_1, f_2, \ldots, f_n)^T$ ein Erzeugendensystem von J. Dann kann folgendes Gleichung für jedes $i = 1, \ldots, n$ aufgestellt werden:

$$g_i = f_i + \alpha_{i1}g_1 + \alpha_{i2}g_2 + \ldots + \alpha_{in}g_n,$$

wobei $\alpha_{ij} \in \mathfrak{m}$ für alle i, j.Daraus ergibt sich dann das Gleichungssystem:

$$\underline{g} = \underline{f} + \underline{\underline{\alpha}} \cdot \underline{g},$$

mit $\underline{\underline{\alpha}} = (\alpha_{ij})_{i,j=1,\ldots,n}$. Durch Umstellen erhählt man wie oben die Form:

$$(\mathbb{1} - \underline{\underline{\alpha}}) \cdot \underline{g} = \underline{f}.$$

Da auch hier gilt, dass die Determinante ungleich 0 ist, da $\det(\mathbb{1} - \underline{\underline{\alpha}})(\underline{0}) = 1$ gilt, existiert also die Inverse:

$$\underline{g} = (\mathbb{1} - \underline{\underline{\alpha}})^{-1} \cdot \underline{f}.$$

Also gilt $g_i \in J$ für alle i, also gilt $I \subset J$. $\square$

(3.10) Koordinatenring einer Kurve

Definition. *Der Koordinatenring von $C = \mathrm{V}(f)$ mit $f \in \mathbb{C}[X,Y]$ reduziert ist der Faktorring*

$$\mathbb{C}[C] := \mathbb{C}[X,Y]/(f).$$

Für ein $g \in \mathbb{C}[X,Y]$ beschreibt $\underline{g}$ die Klasse von g in $\mathbb{C}[C]$. Sind $\underline{g}$ und $\underline{\tilde{g}}$ zwei Klassen, dann gilt:

$$\underline{g} = \underline{\tilde{g}} \quad \Leftrightarrow \quad g = \tilde{g} + a \cdot f, \quad a \in \mathbb{C}[X,Y]$$

und somit gilt auch für ein $p \in C$ $g(p) = \tilde{g}(p)$, da $f(p) = 0$. Elemente von $\mathbb{C}[C]$ kann man somit als Funktionen auf C auffassen, wobei für ein $\underline{g} \in \mathbb{C}[C]$ $\underline{g}(p)$ für $p \in C$ wohldefiniert ist.

Aufgabe

Folgendes ist zu zeigen:

Satz. $\mathbb{C}[C]$ *nullteilerfrei* $\Leftrightarrow$ C *irreduzibel.*

Beweis. Sei f mit $V(f) = C$ gegeben.

$\Leftarrow$ Sei f irreduzibel. Seien nun $\underline{g}$ und $\underline{h}$ Elemente aus $\mathbb{C}[C]$ mit $\underline{g} \cdot \underline{h} = \underline{0}$. Also gilt $gh = \alpha f$. Da aber f irreduzibel und α eine Einheit ist, folgt, dass sich entweder g oder h sich von f nur um eine Einheit unterscheiden. Also gilt entweder $\underline{g} = \underline{0}$ oder $\underline{h} = \underline{0}$. Also ist $\mathbb{C}[C]$ nullteilerfrei.

⇒ Sei nun $\mathbb{C}[C]$ nullteilerfrei und $f = gh$. Dann gilt aber $\underline{g} \cdot \underline{h} = \underline{0}$. Da $\mathbb{C}[C]$ aber nullteilerfrei ist, muss entweder $\underline{g} = \underline{0}$ oder $\underline{h} = \underline{0}$ gelten. In diesem Fall folgt dann, dass sich f nur um eine Einheit von g oder h unterscheidet. Da dies für alle Zerlegungen $f = gh$ gilt, ist f mit $V(f) = C$ irreduzibel.

□

Teilung mit Rest

Sei $f = Y^d + a_1(X)Y^{d-1} + \ldots + a_d(X)$, wobei $a_i(X) \in \mathbb{C}[X]$ und $g \in \mathbb{C}[X,Y]$. Dann sieht die Teilung mit Rest folgendermaßen aus:

$$g = q \cdot f + r, \qquad \deg_Y(r) \leq d-1$$

wobei $r = r_0 + r_1 Y + \ldots + r_{d-1}Y^{d-1}$ mit Koeffizienten $r_i \in \mathbb{C}[X]$. Mit diesem r wird nun die Funktion φ definiert als $\varphi(g) := r$.

Proposition (Teilung-mit-Rest Isomorphismus)**.** *φ induziert einen Isomorphismus von $\mathbb{C}[X]$-Moduln:*

$$\begin{aligned} \mathbb{C}[X,Y]/(f) &\xrightarrow[\sim]{\psi} \mathbb{C}[X]1 \oplus \mathbb{C}[X]Y \oplus \ldots \oplus \mathbb{C}[X]Y^{d-1} \\ \underline{g} &\mapsto \phi(g). \end{aligned}$$

Der Fall, dass $f \in \mathbb{C}[[X,Y]]$ ist analog.

Im Folgenden wird nun die Bijektivität gezeigt.

Beweis. Es gilt $\mathrm{Ker}(\psi) = 0$, da folgende Äquivalenz gilt:

$$\varphi(g) = 0 \quad \leftrightarrow \quad g = q \cdot f + 0 \quad \leftrightarrow \quad g \in (f) \quad \leftrightarrow \quad \underline{g} = 0.$$

Daraus folgt die Injektivität. Die Surjektivität ist offensichtlich □

(3.11) Sylvester-Sequenz

Sei nun im folgenden $P := \mathbb{C}[X,Y]$ und f,$g \in P$. Es werden folgende Abbildungen definiert:

$$\begin{aligned} P/(f) &\to P/(f \cdot g) \\ \underline{p} &\mapsto \underline{p \cdot g} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P/(g) &\to P/(f \cdot g) \\ \underline{q} &\mapsto \underline{q \cdot f} \end{aligned}$$

Mit diesen beiden Abbildungen wird nun die Abbildung σ definiert:

$$\begin{aligned} P/(f) \oplus P/(g) &\xrightarrow{\sigma} P/(f \cdot g) \\ \underline{p}, \underline{q} &\mapsto \underline{p \cdot g + q \cdot f} \end{aligned}$$

wobei $p \cdot g + q \cdot f = \alpha \cdot f \cdot g$ gilt. Dies kann man leicht zeigen, indem man die Gleichung $\underline{\underline{(p - \alpha \cdot f)}} \cdot g + \underline{\underline{q}} \cdot f = 0$ umstellt. Wenn f und g keinen gemeinsamen Faktor haben, dann ist σ injektiv. Dies kann man sich mit folgender Hilfestellung überlegen:

$$\begin{aligned} f &= Y^d + a_1 Y^{d-1} + \ldots + a_d \\ g &= Y^e + b_1 Y^{e-1} + \ldots + b_e \\ \Rightarrow f \cdot g &= Y^{d+e} + \ldots + a_d b_e \end{aligned}$$

wobei alle a_i und b_j aus $\mathbb{C}[X]$ sind. Damit folgt auch:

$$\begin{aligned} P/(f) \oplus P/(g) &\simeq \mathbb{C}[X]^d \oplus \mathbb{C}[X]^e \\ P/(f \cdot g) &\simeq \mathbb{C}[X]^{d+e} \\ \Rightarrow P/(f) \oplus P/(g) &\xrightarrow{\sigma} P/(f \cdot g) \\ \mathbb{C}[X]^d \oplus \mathbb{C}[X]^e &\xrightarrow{S} \mathbb{C}[X]^{d+e}. \end{aligned}$$

Das S wird dabei durch die Sylvestermatrix gegeben:

Proposition. $S = \mathrm{Syl}_{g \cdot f}^T$

Fazit. *Es gilt* $\mathrm{Koker}(C) \simeq \mathrm{Koker}(S)$, *da* $P/(f \cdot g)/\mathfrak{m}(\sigma) = P/(f \cdot g, f \cdot g) = P/(f \cdot g)$. *Also gilt* $\mathrm{Koker}(S) \simeq P/(f \cdot g)$.

Analog gilt dies auch wieder für den Potenzreihenring $\hat{P} = \mathbb{C}[[X, Y]]$.

Proposition. *Sei nun* $A \in \mathrm{Mat}(N \times N, \mathbb{C}[[X, Y]])$ *mit* $\det(A) \in \mathbb{C}[[X]]$, *also:*

$$\begin{aligned} \mathbb{C}[[X]]^N &\xrightarrow{A} \mathbb{C}[[[X]]^N \\ \mathbb{C}[[X]]^N &\xrightarrow{\det(A)} \mathbb{C}[[X]]. \end{aligned}$$

Angenommen, dass die Determinante von A *ungleich* 0 *ist, also* $\det(A) \neq 0$, *dann gilt:*

$$\dim(\mathrm{Koker}(A)) = \dim(\mathrm{Koker}(\det(A))).$$